14-12-20

Επανάληψη θεωρήματος 1.

Πx

Παράδειγμα 4: Να επιλυθεί η δ.ε. $(1-x^2)y''-xy'+y=0$ γύρω απ' το $x_0=0$. Ειδικά να βρεθεί η λύση y_0 που πληροί τις αρχικές συνθήκες.

Λύση: $a_2(x)=1-x^2$, $a_1(x)=-x$, $a_0(x)=1$

Για $x_0=0$: $a_2(x_0)=a_2(0)=1-0=1\neq 0$.

Έχουμε, $\frac{a_1(x)}{a_2(x)}=\frac{-x}{1-x^2}$ και $\frac{a_0(x)}{a_2(x)}=\frac{1}{1-x^2}$

Οι ακτίνες επομένως είναι: $R_1=1$ $(|x|<1)$ και $R_2=1$ $(|x|<1)$.

Συνεπώς, $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot(x-0)^n=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot x^n$, $R=1$.

Τότε:

$$D=(1-x^2)y''-xy'+y=(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} c_n\cdot n\cdot(n-1)x^{n-2}-x\cdot\sum_{n=1}^{\infty} c_n\cdot n\cdot x^{n-1}+1\cdot\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot x^n=$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty} c_n\cdot n\cdot(n-1)x^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty} c_n\cdot n\cdot(n-1)x^n-\sum_{n=1}^{\infty} c_n\cdot n\cdot x^n+\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot x^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)\cdot x^n-\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot c_n\cdot(n-1)x^n-\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot c_n\cdot x^n+\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot x^n=$$

$$=c_2\cdot 2+c_3\cdot 3\cdot 2\cdot x+\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n-\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdot c_n\cdot x^n-c_1\cdot x-\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot c_n x^n+$$

$$+c_0+c_1\cdot x+\sum_{n=2}^{\infty} c_n\cdot x^n$$

$$\Rightarrow 0=2c_2+c_0+6c_3\cdot x-\cancel{c_1x}+\cancel{c_1x}+\sum^{\infty}\left[(n+1)(n+2)c_{n+2}-n(n+1)c_n-n\cdot c_n+c_n\right]x^n.$$

Με $2c_2+c_0=0$ και $c_3=0$

$$\Longrightarrow c_{n+2}=\frac{n-1}{n+2}\cdot c_n,\quad n\geq 2.\ (\text{βήμα } 2) \text{ και } c_2=-\frac{1}{2}c_0,\ c_3=0$$

Με βήμα 2 ξεκινάμε:

$n=2k+1$, $2k+1\geq 2$, $2k\geq 1$

$\Rightarrow k\geq 1/2$

$\Rightarrow k\geq 1.$

(i) $c_{2k+2} = \dfrac{2k+1-1}{2k+1+2} \cdot c_{2k+1}$.

(ii) $c_{2k+3} = \dfrac{2k}{2k+3} \cdot c_{2k+1}, \; k \geq 1$

Για $k=1$: $c_5 = \dfrac{2 \cdot 1}{5} \cdot c_3 = 0$ (βρήκαμε πριν $c_3 = 0$).

Για $k=2$: $c_7 = \dfrac{4}{7} \cdot c_5 = 0$ ($c_5 = 0$ από την προηγούμενη σχέση)

...

Για $k=k$: $c_{2k+3} = \ldots = 0, \; k \geq 1$

(i) $c_{2k+2} = \dfrac{2k-1}{2k+2} \cdot c_{2k}, \; k \geq 1$.

Για $k=1$: $\cancel{c_4} = \dfrac{1}{4} \cdot c_2$

Για $k=2$: $\cancel{c_6} = \dfrac{3}{6} \cdot \cancel{c_4}$

Για $k=3$: $c_8 = \dfrac{5}{8} \cdot \cancel{c_6}$

....

Για $k=k$: $c_{2k+2} = \dfrac{2k-1}{2k+2} \cdot \cancel{c_{2k}}$.

$$\overset{(*)}{c_{2k+2} = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-3)(2k-1)}{4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots (2k) \cdot (2k+2)} \cdot c_2}, \; k \geq 1.$$

$$(*) = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots (2k-3)(2k-1)}{(2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 4) \ldots (2 \cdot k)[2 \cdot (k+1)]} \cdot c_2 = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots (2k-3)(2k-1)}{\underbrace{2 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots \cdot (k+1))}_{} \cdot \boxed{(k+1)!}}$$

$$c_{2n+2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots (2n-1)}{2^n \cdot (n+1)!} c_2, \; n \geq 1.$$

$$c_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots (2n-3)}{2^{n-1} \cdot n!} c_2, \; n \geq 2.$$

$$\Longrightarrow y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \cdot x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} \cdot x^{2n}$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 \cdot x + \sum_{n=1}^{\infty} \cancel{c_{2n+1}} \cdot x^{2n+1} + c_0 - \frac{1}{2} c_0 x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{c_{2n}}_{\to (\ ) c_0} \cdot x^{2n}$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 \cdot x + c_0 \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{2} x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (\ ) x^{2n} \right\}, \ |x| < 1.$$

$c_0^{a} = 1, \ c_1^{a} = 0 \to y_a$

$c_0^{\beta} = 0, \ c_1^{\beta} = 1 \to y_\beta$.

Πx **Παράδειγμα 5:** Να βρεθούν οι λύσεις της δ.ε. $x^2(x^2-1)y'' + x\cdot(2x^2-1)y' + y = 0$ και ορίζονται για τα μεγάλα $|x|$.

Λύση: Για $w = 1/x$ έχουμε:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dw} = -w^2 \cdot \frac{dy}{dw}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dw} \cdot \left(-w^2 \cdot \frac{dy}{dw}\right)\frac{dw}{dx} = \left(-2w \cdot \frac{dy}{dw} - w^2 \cdot \frac{dy}{dw}\right)\frac{(-1/x^2)}{-w^2}$$

$$\Rightarrow y'' = 2w^3 \cdot \frac{dy}{dw} + w^4 \cdot \frac{dy}{dw}$$

$$\rightsquigarrow (1-w^2) \cdot \frac{d^2y}{dw^2} - w\frac{dy}{dw} + y = 0 \ , \ w = 0.$$

$y_1(x) = w, \ |w| < 1$ και

$$y_2(x) = 1 - \frac{w^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[1\cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-3)]^2 \cdot (2n-1)}{2n!} \cdot w^{2n}, \ |w| < 1.$$

Έτσι, δύο γρ. ανεξάρτητες λύσεις της δ.ε. είναι:

$y_1(x) = 1/x \ , \ |x| \geq 1$ και

$$y_2(x) = 1 - \frac{1}{2x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[1\cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-3)]^2 (2n-1)}{2n!} \cdot \frac{1}{x^{2n}}, \ |x| > 1.$$

Ας σημειωθεί ότι η λύση y_1 μπορεί να οριστεί για όλα τα $x \neq 0$.

(Πχ)

Παράδειγμα 1: Να επιλυθεί η δ.ε. $y''-xy=0$ γύρω απ' το $x_0=0$.

Λύση: $a_2(x)=1$, $a_1(x)=0$, $a_0(x)=-x$, με $a_2(0)=1\neq 0$.

Επομένως, $\frac{a_1(x)}{a_2(x)}=0$, $\frac{a_0(x)}{a_2(x)}=-x$ και $R_1=R_2=+\infty=R$.

$$\Rightarrow y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot x^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} c_n\cdot n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}-x\cdot\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot x^n=0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot x^n-\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot x^{n+1}=0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-1}^{\infty} c_{n+3}(n+3)(n+2)\cdot x^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot x^{n+1}=0$$

$$\rightsquigarrow c_2\cdot(2\cdot 1)\cdot x^0+\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+3}(n+3)(n+2)x^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot x^{n+1}$$

$$c_2=0:\ \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+3)(n+2)\cdot c_{n+3}-c_n\right]x^{n+1}=0$$

$$c_2=0:\ c_{n+3}=\frac{c_n}{(n+2)(n+3)},\ n\geq 0.$$

<u>$n=3k$</u> : $c_{3k+3}=\frac{c_{3k}}{(3k+2)(3k+3)}$, $k\geq 0$.

Για $k=0$: $\cancel{c_3}=\frac{c_0}{6}$,

Για $k=1$: $\cancel{c_6}=\frac{\cancel{c_3}}{5\cdot 6}$,

...

Για $k=k$: $c_{3k+3}=\frac{c_{3k}}{(3k+2)(3k+3}$

<u>$n=3k+2$</u> : $c_{3(k+1)+2}=\frac{c_{3k+2}}{(3k+4)(3k+6)}$, $k\geq 0$

Για $k=0$: $c_5=\frac{c_2}{4\cdot 6}=0$, $c_{3n+2}=0$, $n\geq 0$.

...

...

(Πx) **Άσκηση 4, σελ. 218**: Να βρεθούν δύο γρ. ανεξ/τα λύσεις γύρω απ' το σημειούμενο σημείο για κάθεμια απ' τις παρακάτω:

(i) $y'' - x^3 y = 0$, $x_0 = 0$

(ii) $y'' + x^3 y' + 3x^2 y = 0$, $x_0 = 0$

(iii) $y'' - xy = 0$, $x_0 = 1$.

Λύσεις:

(i) $y'' - x^3 y = 0$, $x_0 = 0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\cdot c_n \cdot x^{n-2} - x^3 \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n = 0$$

$$\sum_{n=-3}^{\infty} (n+5)(n+4)\, c_{n+5} \cdot x^{n+3} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^{n+3} = 0$$

$$\Rightarrow 2\cdot 1\cdot c_2 + 3\cdot 2\cdot x\cdot c_3 + 4\cdot 3\cdot c_4\cdot x^2 + \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+5)(n+4)\, c_{n+5} - c_n\right] x^{n+3} = 0$$

$\rightsquigarrow c_2 = 0$, $c_3 = 0$, $c_4 = 0$

$$c_{n+5} = \frac{c_n}{(n+4)(n+5)}, \quad n \geq 0 \quad \underline{(\text{βήμα } 5)} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} n = 5k \\ n = 5k+1 \\ \cdots \\ n = 5k+4 \end{array}\right\}$$

(iii) $y' - xy = 0$, $x_0 = 1$ ... $x_0 = 1$ ομαλό σημείο.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-1)^n$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot n\cdot (n-1)\cdot (x-1)^{n-2} - \underbrace{x}_{=(x-1)+1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-1)^n$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{n=2} n\cdot (n-1)\cdot c_n \cdot (x-1)^{n-2} - (x-1)\sum_{n=0} c_n \cdot (x-1)^n - \sum_{n=0} c_n \cdot (x-1)^n$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{n=2}^{\infty} n\cdot (n-1)\cdot c_n \cdot (x-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-1)^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-1)^n \ldots$$